

TD 6: Trigonalisation

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a, b, c , A est-elle diagonalisable (sur \mathbb{R}) ?

Solution. Le polynôme caractéristique étant $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2(c - \lambda)$, on trouve 1 et c comme valeurs propres de A . On peut distinguer deux cas :

Cas 1 : $c = 1$. Alors A admet une seule valeur propre, de multiplicité algébrique 3. Son espace propre associé est le noyau de la matrice non nulle

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et est donc de dimension < 3 (1 si $b = 0$ ou $a = 0$, 2 sinon). En particulier, A n'est pas diagonalisable si $c = 1$.

Cas 2 : $c \neq 1$. A admet une valeur propre 1 de multiplicité algébrique 2, et une valeur propre c simple. Il suit que E_c est de dimension 1, et A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1) = 2$. On note que

$$\dim(E_1) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c - 1 \end{pmatrix}$$

est égale à 2 \iff les dernières deux colonnes sont colinéaires $\iff a = 0$ ($c - 1 \neq 0$).

Conclusion : A est diagonalisable $\iff a = 0$ et $c \neq 1$.

Exercice 2. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer leurs valeurs propres.
2. Déterminer si la matrice A est diagonalisable. Si oui, trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. Sinon, trouver une matrice triangulaire supérieure U et une matrice inversible P telles que $A = PUP^{-1}$.
3. De même pour B .

Solution.

1. Les deux matrices ont le même polynôme $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. On note la racine évidente $\lambda = 1$ et factorise

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.$$

2. Pour la matrice A , on calcule

$$E_1 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}(1, -1, 1)$$

où on a effectué l'opération $L_2 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ pour la deuxième égalité. De plus,

$$E_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (0, 1, -1))$$

via les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Alors A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice B admet les mêmes valeurs propres (des mêmes multiplicités algébriques), et on calcule les espaces propres associés :

$$E_1 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}(1, -1, 1)$$

(en effectuant $L_2 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$) et

$$E_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{Vect}(1, -1, 0)$$

(en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$). Vu que $\dim(E_{-2}) = 1$ est strictement inférieur à la multiplicité de la racine -2 , B n'est pas diagonalisable.

On cherche alors une base $\{v_1, v_2, v_3\}$ telle que $v_1 \in E_1$, $v_2 \in E_{-2}$ et v_3 satisfait

$$Bv_3 = -2v_3 + v_2 \tag{1}$$

(donc v_3 est une deuxième vecteur de base pour l'espace caractéristique N_{-2}). En prenant $v_1 = (1, -1, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 0)$, l'équation (1) correspond au système inhomogène

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Par exemple, on peut prendre $v_3 = (0, 1, -1)$ comme solution. Il suit que $B = PUP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Autrement dit : dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, l'application linéaire est donnée par la matrice triangulaire U .)

Exercice 3. Pour chacune des matrices ci-dessous, donner une matrice triangulaire supérieure U_i et une matrice inversible P_i tel que $A_i = P_i U_i P_i^{-1}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système différentiel $\frac{d\vec{v}}{dt} = A_1 \vec{v}$ avec condition initiale $\vec{v}(0) = (1, 2, 2)$.

Solution. Notons que les trigonalisations trouvées ci-dessous ne sont pas les seules possible...

Matrice A_1 : le polynôme caractéristique est $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$. On voit la racine 1 et factorise

$$P_{A_1}(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Cela donne 1 (mult=1) et 2 (mult = 2) comme valeurs propres, on calcule leurs espaces propres associés :

$$E_1 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(0, 1, 1)$$

(via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$) et

$$E_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}(1, 1, 0)$$

(via $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3$). Vu que A_1 n'est pas diagonalisable, il faut trouver une deuxième vecteur de base dans l'espace caractéristique N_2 , c'est-à-dire un vecteur tel que

$$A \vec{u} = 2 \cdot \vec{v} + (1, 1, 0).$$

Ceci correspond au système linéaire de la forme matricielle

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

avec solution $\vec{u} = (0, 0, 1)$ (par exemple). Alors $A_1 = P_1 U_1 P_1^{-1}$ avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour le système différentiel $\frac{d\vec{v}}{dt} = A_1 \vec{v}$, on applique la méthode déjà vue dans feuille 4 : on pose $\vec{w} = P^{-1} \vec{v}$ et considère le système différentiel résultant $\frac{d\vec{w}}{dt} = U_1 \vec{w}$. La condition initial devient $\vec{w}(0) = (1, 1, 1)$. Explicitement, cela correspond au système

$$\begin{cases} \frac{dw_1(t)}{dt} = w_1(t) \\ \frac{dw_2(t)}{dt} = 2w_2(t) \\ \frac{dw_3(t)}{dt} = 2w_3(t) + w_2(t) \end{cases} \quad w_1(0) = w_2(0) = w_3(0) = 1.$$

Résoudre les premières deux équations différentielles donne $w_1(t) = e^t$ et $w_2(t) = e^{2t}$. La troisième équation se réduit alors à l'équation différentielle inhomogène

$$\frac{dw_3(t)}{dt} - 2w_3(t) = e^{2t}.$$

On fait l'ansatz que $w_3(t) = f(t) \cdot e^{2t}$. En calculant sa dérivée et notant que $w_3(0) = f(0)$, on trouve l'équation différentielle $f'(t)e^{2t} = e^{2t}$, ou $f'(t) = 1$ avec condition initiale $f(0) = 1$. On en déduit que $f(t) = 1 + t$, d'où $w_3(t) = (1 + t)e^{2t}$. Finalement, la solution du système différentiel original est

$$\vec{v}(t) = P\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ (1+t)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \\ e^t + (1+t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Matrice A_2 : son polynôme caractéristique est

$$P_{A_2}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1 - \lambda)^3,$$

alors il y a 1 comme seule valeur propre de multiplicité 3. On calcule

$$E_1 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 1, 1))$$

(tout les lignes sont colinéaires). En manquant un troisième vecteur propre de valeur propre 1, la matrice A_2 n'est pas diagonalisable. Afin de la trigonaliser, il faut trouver un vecteur \vec{v} et $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$A\vec{v} = \vec{v} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons alors le système linéaire (dans les variables v_1, v_2, v_3 et a, b)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(via $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_3 - L_2$). En choisissant $b = 1$, les premières deux lignes donnent $a = 2$. Ensuite, pour résoudre la dernière équation on peut prendre $\vec{v} = (1, 0, 0)$. (Vérifier que, en effet, $\vec{v} = (1, 0, 0)$ satisfait $A\vec{v} = \vec{v} + 2(1, -1, 0) + (0, 1, 1)$!)

On conclut que $A_2 = P_2 U_2 P_2^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice A_3 : notons d'abord que les composantes diagonales de A_3 sont beaucoup plus grandes que les autres. Il ne serait donc pas une mauvaise idée de considérer la matrice

$$B = A_3 - 7I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -2 \\ -2 & 0 & -8 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

En calculant le polynôme caractéristique de B , on trouve

$$P_B(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3.$$

On trouve 2 comme seule valeur propre de B , alors $A_3 = B + 7I_3$ a 9 comme seule valeur propre. L'espace propre associé est

$$E_9 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{Vect}((2, 2, -1))$$

Il manque deux vecteurs de base, alors il faut trouver deux vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 tels que

$$A\vec{v}_1 = 9\vec{v}_1 + a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\vec{v}_2 = 9\vec{v}_2 + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c\vec{v}_1$$

pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour trouver un tel \vec{v}_1 , il faut trouver une solution du système (dans les variables $(v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3})$ et a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -8 & 2 \\ -5 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -8 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & -18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

telle que \vec{v}_1 et $(2, 2, -1)$ ne sont pas colinéaires. En prenant $a = 3$ et $v_{1,3} = -1$, on trouve $v_{1,2} = 0$ et $v_{1,1} = 1$, donc $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$.

Ensuite, pour \vec{v}_2 il faut trouver une solution du système (dans les variable $(v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}$ et b, c)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & -5 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -8 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & -5 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -8 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -9 & -18 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

telle que \vec{v}_2 est indépendant des vecteurs construit avant. Par exemple, on peut prendre $b = 0$, $c = 9$ et $\vec{v}_3 = (1, -1, 0)$.

Finalement, on arrive à $A = PUP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit Q un polynôme et $f: E \rightarrow E$ un endomorphisme, avec E de dimension n .

1. Montrer que si f est diagonalisable alors $Q(f)$ est diagonalisable.
2. Montrer que si $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ est le spectre de f , alors $\text{Sp}(Q(f)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$.
3. Montrer que si $f^{2022} = 0$, alors $f^n = 0$.

Solution.

1. Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de vecteur propres de f . Alors

$$Q(f)(v_i) = \sum_{k=1}^n a_k f^k(v_i) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_i^k \cdot v_i = Q(\lambda_i) v_i$$

où λ_i est la valeur propre de v_i . On conclut que E admet également une base de vecteurs propres de $Q(f)$, alors $Q(f)$ est diagonalisable.

2. On vient de calculer que $Q(\lambda_i)$ est une valeur propre de $Q(f)$ si λ_i est valeur propre de f , alors $\{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\} \subset \text{Sp}(Q(f))$. Pour montrer que $\text{Sp}(Q(f)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$, prenons une base \mathcal{B} de E pour laquelle f est donnée par une matrice U triangulaire supérieure. En particulier, les coefficients sur sa diagonale sont les valeurs propres λ_i de f .

La matrice de $Q(f)$ dans la base \mathcal{B} est alors donnée par $Q(U)$. Mais pour une matrice triangulaire U , $Q(U)$ reste une matrice triangulaire, dont les coefficients diagonaux sont donnés par les image $Q(\lambda_i)$ des coefficients diagonaux de U .

3. Si $f^{2022} = 0$, toutes ses valeurs propres sont des racines du polynôme X^{2022} , alors $\text{Sp}(f) = \{0\}$. On peut choisir une base \mathcal{B} de E pour laquelle f est donnée par une matrice $U \in M_n(K)$ triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de U (= ses valeurs propres) sont tous nuls. Mais une matrice strictement triangulaire $U \in M_n(K)$ satisfait toujours $U^n = 0$.

Exercice 5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A .
2. Pour chaque diviseur $P(X)$ de $P_A(X)$, déterminer si $P(X)$ est un polynôme annulateur de A .
3. En utilisant partie (2.), calculer pour tout entier $n \geq 0$ les $\alpha_n, \beta_n \in K$ tels que

$$A^n = \alpha_n \cdot A + \beta_n \cdot I_n.$$

Solution.

1. $P_A(\lambda) = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2 - \lambda)^3$.
2. Les diviseurs non triviaux sont $P_1(X) = (X - 2)$ et $P_2(X) = (X - 2)^2$, alors :

$$P_1(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il suit que $P_2(A)$ est le polynôme minimal de A .

3. On effectue la division Euclidienne de X^n par $(X - 2)^2$ et écrit

$$X^n = (X - 2)^2 Q(X) + \alpha_n X + \beta_n.$$

Vu que $(X - 2)^2$ est le polynôme minimal de A , ces α_n et β_n sont les coefficients qu'on cherche.

Pour déterminer α_n et β_n , l'évaluation des polynômes aux deux côtés dans $X = 2$, ainsi que leurs dérivées donne :

$$\begin{aligned} 2^n &= 2\alpha_n + \beta_n \\ n \cdot 2^{n-1} &= \alpha_n. \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha_n = n \cdot 2^{n-1}$ et $\beta_n = (1 - n)2^n$.

Exercice 6. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice A^{2022} . (Indication : Cayley–Hamilton.)

Solution. On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -4 & 1-\lambda & -4 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((1-\lambda)(-3-\lambda)+8\right) + 0 + \left(-8-(1-\lambda)\right) \\ &= 1 - \lambda^3 \end{aligned}$$

Par Cayley–Hamilton, on trouve que $A^3 = I_3$, alors pour tout entier $n \geq 0$:

$$A^{3n} = I_3 \quad A^{3n+1} = A \quad A^{3n+2} = A^2.$$

2022 étant divisible par 3, on trouve $A^{2022} = I_3$.

Exercice 7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1} en utilisant le théorème de Cayley–Hamilton.

Solution. Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 & -2 \\ -6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1+\lambda)^2 + 48 + 24(-1-\lambda) - 4(7-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3.$$

Par conséquent, $3 \cdot I_3 = A(A^2 - 5A + 7I_3)$, d'où

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{3}(A^2 - 5A + 7I_3) = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 25 & 8 & -8 \\ -24 & -7 & 8 \\ 24 & 8 & -7 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 7I_3 \right] \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A (on pourra remplacer la colonne C_1 par la somme des colonnes). Décomposer P_A en facteurs premiers. En déduire que

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(A - I)^2 \oplus \text{Ker}(A^2 + I).$$

Solution.

Exercice 9. (*) Soient $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $A = AB - BA$. Montrer que $A^2 = 0$. (Indication : identifier les coefficients du polynôme caractéristique de A .)

Solution. Rappelons que pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique est donné par $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A) \cdot \lambda + \det(A)$. Ici, on a que

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0.$$

La dernière égalité suit du fait que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ (voir exercice 1.3.2 de TD4). Le théorème de Cayley–Hamilton implique que

$$A^2 = -\det(A) \cdot I_2.$$

Il suit que

$$A^2 = A(AB - BA) = -\det(A)B - ABA \quad \text{et} \quad A^2 = (AB - BA)A = ABA + \det(A) \cdot B.$$

Une comparaison des deux expressions montre que $A^2 = 0$.

Exercice 10. (*) Soit f un endomorphisme de E et $Q(X) = Q_1(X)Q_2(X)$ un annulateur de f . Soient $U_1(X), U_2(X)$ deux polynômes tels que $U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1$. Montrer que les projecteurs de

$$E = \text{Ker}(Q_1(f)) \oplus \text{Ker}(Q_2(f))$$

sur $\text{Ker}(Q_1(f))$ et $\text{Ker}(Q_2(f))$ sont respectivement $\text{pr}_1 = U_2(f) \circ Q_2(f)$ et $\text{pr}_2 = U_1(f) \circ Q_1(f)$.

Solution. Note que $\text{pr}_2 = \text{Id} - \text{pr}_1$ parce que $U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1$. Il suffit donc de montrer que $\text{pr}_1(v) = v$ pour $v \in \text{Ker}(Q_1(f))$ et $\text{pr}_1(v) = 0$ pour $v \in \text{Ker}(Q_2(f))$. En effet, pour $v \in \text{Ker}(Q_1(f))$ on trouve

$$v = (U_1(f)Q_1(f) + U_2(f)Q_2(f))(v) = (U_1(f)Q_1(f))(v) + (U_2(f)Q_2(f))(v) = 0 + \text{pr}_1(v)$$

et pour $v \in \text{Ker}(Q_2(f))$ on a évidemment que

$$\text{pr}_1(v) = U_2(f)Q_2(f)(v) = 0.$$

Exercice 11. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $Q_1(X) = (X + 2)$ et $Q_2(X) = (X - 1)^2$. Montrer que $Q_1(X)Q_2(X)$ est un polynôme annulateur de A . (Indication : calculer le polynôme caractéristique.)
2. Trouver des polynômes $U_1(X)$ et $U_2(X)$ tels que $U_1(X) \cdot (X + 2) + U_2(X) \cdot (X - 1)^2 = 1$. En utilisant l'exercice précédent, donner les projecteurs sur les espaces caractéristique de A associés aux valeurs propres 1 et -2 .

Solution.

1. Le polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = -Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)$ est annulateur.

2. La division Euclidienne de $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$ par $X + 2$ donne $(X - 1)^2 = (X - 4)(X + 2) + 9$, alors

$$\frac{1}{9}(4 - X)(X + 2) + \frac{1}{9}(X - 1)^2 = 1.$$

Les projecteurs de la décomposition en espaces caractéristique

$$K^3 = N_{-2} \oplus N_1$$

sont alors donnés par

$$\text{pr}_{N_{-2}} = \frac{1}{9}(A - 1)^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(en particulier, $N_{-2} = \text{Vect}(2, 4, 3)$) et

$$\text{pr}_{N_1} = I_3 - \text{pr}_{N_{-2}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -4 & 5 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $A^n = I_n$.

1. Qu'est-ce qu'on peut dire sur les valeurs propres de A ? Montrer que la trace de A satisfait $|\text{Tr}(A)| \leq n$.
2. Montrer que A est diagonalisable (sur \mathbb{C}).
3. Montrer que $A = I_n$ si et seulement si $\text{Tr}(A) = n$.

Solution.

1. $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de A , alors tous les valeurs propres λ_i de A sont des racines de l'unité d'ordre n . Rappelons que $\text{Tr}(A)$ est la somme des valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités). Par conséquent,

$$|\text{Tr}(A)| = |\lambda_1 + \cdots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| = 1 + \cdots + 1 = n.$$

2. Le polynôme minimal $m_A(X)$ divise le polynôme $X^n - 1$, qui est scindé (sur \mathbb{C}) avec des racines simples. Par conséquent, $m_A(X)$ n'a que des racines simples dans \mathbb{C} , donc A est diagonalisable.
3. Évidemment $\text{Tr}(I_n) = n$. Pour la réciproque, si $\text{Tr}(A) = n$, l'inégalité ci-dessus devient une égalité ; cela implique que toutes les valeurs propres λ_i (toutes racines de l'unité) sont égales. Alors $\text{Tr}(A) = n \cdot \lambda = n$, et donc la seule valeur propre de A est 1. Par partie (2.), A est la matrice I_n .